

OLIMPIADAS MATEMÁTICAS DEL NIVEL SUPERIOR
PROGRAMA DE MATEMÁTICA, DEPR
ABRIL 2015

Instrucciones: Conteste cada pregunta comenzando en la cara de la hoja de papel donde se presenta la pregunta y continuando al dorso de ser necesario. Se corregirá solamente el trabajo que aparezca en ambos lados de la hoja de una pregunta. Cada pregunta tiene un valor de 10 puntos.

Instructions: Answer each question beginning on the face of the sheet of paper where the question appears and use the back of the page if needed. Only the work that appears on both sides of the sheet of paper with the statement of a given problem will be graded. Each problem has a total value of 10 points.

1. **Problema:**

Sebastián nació el día que Ana cumplió tres años. ¿Cuántos años tendrá Sebastián cuando Ana tenga el doble de la edad de Sebastián?

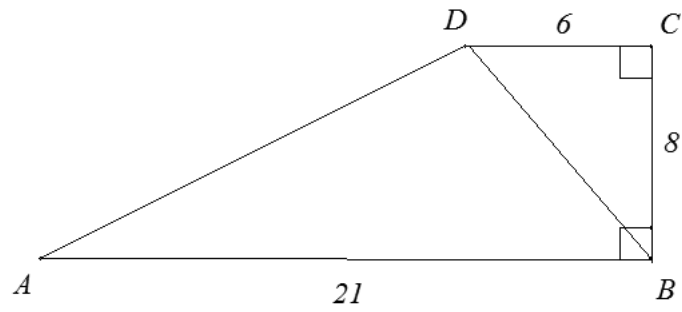
1. **Problem:**

Sebastián was born on Ana's third birthday. What will be the age of Sebastián when Ana is twice as old as Sebastián?

2

2. **Problema:** ¿Cuál es la suma de las distancias AD y BD en la figura que se muestra.

2. **Problem:** What is the sum of the distances AD and BD in the figure shown.



3. Problema:

¿Cuántos enteros positivos de dos dígitos hay tal que el dígito de las decenas es mayor que el dígito de las unidades.

3. Problema: How many two digit positive integers are there with the tens digit greater than the units digit?

4

4. **Problema:**

Sean x y b enteros positivos y sea $b > 1$. La representación del número x en la base b es 324 y en la base $b + 2$ es 155. Halle b .

4. **Problem:**

Let x and b be positive integers with $b > 1$. The number x has representation 324 in base b and 155 in base $b + 2$. Find b .

5. **Problema:** Cierta número real x queda en el intervalo unitario, es decir, satisface la relación $0 \leq x \leq 1$. Al dividir este intervalo en tres partes iguales, x queda ubicado en el segundo intervalo resultante. Al dividir a su vez este último intervalo, en tres partes iguales, x queda, nuevamente, en el segundo intervalo que resulta, y así sucesivamente. Si sabemos que x no es una fracción ternaria (una fracción cuyo denominador es una potencia de tres), determina el valor de x .
5. **Problem:** A certain real number x is in the unit interval, that is, $0 \leq x \leq 1$. If this interval is divided in three equal parts, x is located in the second resulting interval. If this last interval is divided, once more, in three equal parts, x is located, again, in the second resulting interval, and so on. If we know that x is not a triadic fraction, (a fraction whose denominator is a power of three), find the value of x .

6. Problema:

Los habitantes del planeta Plutón emplean las mismas operaciones matemáticas que los terrícolas (+, −, etc.). Ellos emplean además un operador @ desconocido por nosotros. Las siguientes aseveraciones son ciertas para cualesquiera dos números reales x y y :

6. Problem:

The inhabitants of planetoid Pluto use the same mathematical operations as we do on earth (+, −, etc.). They also use an operator @, unknown to us. The following statements are true for any real numbers x and y :

$$\begin{aligned}x @ 0 &= x \\(x + 1) @ y &= x @ y + y + 1.\end{aligned}$$

¿Cuál es el valor de $12 @ 5$?
What is the value of $12 @ 5$?

Problema:

7. Halle el valor de n :

Problem:

7. Find the value of n :

$$9^n + 9^n + 9^n = 3^{2015}.$$

8

8. **Problema:**

Sea n el producto de los primeros 500 números primos. ¿Cuántos ceros tiene al final el número n^2 ?

8. **Problem:**

Let n be the product of the first 500 primes. How many final zeros does n^2 have?

9. Problema:

El producto de tres enteros impares consecutivos reducido por 23 es 99 menos que el cubo de la suma del número menor y dos. Determinar el menor de los números.

9. Problem:

The product of three consecutive odd integers reduced by 23 is 99 less than the cube of the sum of the smallest number and two. Find the smallest number.

10. Problema:

La función f se define en los enteros positivos de la siguiente manera:

$$f(1) = 0;$$

$$f(n) = 3f(n - 1) + 1 \text{ para todo } n > 1.$$

Calcular el valor de $f(1003) - f(1001)$.

10. Function f is defined on the positive integers as follows:

$$f(1) = 0;$$

$$f(n) = 3f(n - 1) + 1 \text{ for all } n > 1.$$

Compute the value of $f(1003) - f(1001)$.